

DESCOBRINDO PADRÕES E FAZENDO CONJECTURAS

(todas as respostas devem ser justificadas)

- 1) Encontre todos os números naturais que podem ser escritos como a soma de dois números compostos. Prove que não há outros além dos que você encontrou.
- 2) Encontre todas as triplas de “primos trigêmeos”, que são triplas de números primos que diferem por 2, tais como (3,5,7). Prove que não há outras além das que você encontrou.
- 3) O jogo Nim começa com uma pilha com 20 pedrinhas. Dois jogadores se alternam, cada um deles retirando, na sua vez de jogar, 1, 2 ou 3 pedrinhas. Vence o jogo aquele que tirar a última pedrinha. Se ambos jogam para vencer, quem vence o jogo? O primeiro ou o segundo a jogar?
- 4) Um jogo começa com 50 moedas, de vários valores, dispostas em fila sobre uma mesa. Dois jogadores se alternam, cada um deles retirando, na sua vez de jogar, uma moeda de uma das duas extremidades. No final, cada um terá retirado 25 moedas. Vence o jogo aquele que acumular a maior quantidade de dinheiro. Se ambos jogam para vencer, quem vence o jogo? O primeiro ou o segundo a jogar?
- 5) Um pote opaco contém 100 balas, que podem ser de uva ou de menta. Sabe-se que o pote contém pelo menos duas balas de uva. Sabe-se também que, ao se tirar quaisquer três balas do pote, pelo menos uma delas será de menta. Quantas balas de cada tipo existem no pote?
- 6) 1025 jogadores de tênis se inscrevem num torneio eliminatório (“mata-mata”). Isso significa que, a cada rodada, os jogadores se dividem em pares, jogam, o vencedor de cada partida prossegue no torneio, e o perdedor é eliminado. Se, no início de alguma rodada, há um número ímpar de jogadores, um deles é sorteado para pular aquela rodada e retornar na seguinte. E assim por diante, até o último jogo – a final – de onde sairá o campeão do torneio. Quantas partidas são jogadas neste torneio?
- 7) (OBM-2014 – 2ª fase) O primeiro termo de uma sequência é 10. Cada termo seguinte é igual à metade do termo anterior, se este for par, ou 7 unidades maior do que o termo anterior, se este for ímpar. Qual o 2018º termo da sequência?
- 8) Qual a soma dos números naturais de 1 até 100?
- 9) Qual a soma dos 100 números naturais seguintes?
- 10) Qual a soma dos 100 primeiros números naturais ímpares?
- 11) Qual a soma dos 100 primeiros números naturais pares?
- 12) Deduza a fórmula do n-ésimo termo e da soma dos primeiros n termos de uma Progressão Aritmética (PA), a partir da definição recursiva:
$$a_1 = b; \quad a_n = a_{n-1} + d, \text{ para } n > 1 \quad (b \text{ e } d \text{ são números reais fixos})$$
- 13) Verdadeiro ou Falso? (Justifique!)
 - a) A soma de dois números ímpares é par;
 - b) A soma de dois números tem a mesma paridade que a diferença entre eles;
 - c) O produto de dois números ímpares é ímpar;
 - d) Se a soma de dois inteiros é ímpar, então seu produto é par;

- e) Se a soma de dois inteiros é par, então seu produto é par;
f) Se o produto de dois inteiros é par, então sua soma é ímpar.
- 14) Numa lousa estão escritos os números naturais de 1 a 101. Um aluno apaga dois destes números e escreve a sua diferença (o maior menos o menor). E assim por diante... Após 100 repetições deste procedimento, restará apenas um número escrito na lousa. É possível que este número seja zero?
- 15) É possível atribuir um sinal + ou um sinal – a cada um dos números:
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10,
de modo que a soma (com sinal) dos dez números seja igual a zero?
- 16) Em cada um dos 10 degraus de uma escada existe uma rã. Cada rã pode, de um pulo, colocar-se em outro degrau. Mas quando uma rã faz isso, ao mesmo tempo, uma outra rã pulará a mesma quantidade de degraus em sentido contrário (uma sobe e a outra desce). Conseguirão as rãs se colocar todas juntas num mesmo degrau?
- 17) Prove que, em qualquer grupo de pessoas, existe um número par de pessoas que conhece um número ímpar de outras pessoas (suponha que se A conhece B, então B conhece A).
- 18) Prove que a soma de três inteiros consecutivos é divisível por 3 e que o produto de 3 inteiros consecutivos é divisível por 6. Generalize.
- 19) Num quarto totalmente escuro há uma mesa. Sobre esta mesa há 26 moedas. 10 delas estão com o lado CARA virado para cima. As outras 16 estão com o lado COROA. No escuro, você não consegue ver ou sentir se uma dada moeda está com a CARA ou a COROA virada para cima, mas você pode virar quantas moedas quiser. Como separar as moedas em dois grupos de modo que cada grupo tenha o mesmo número moedas com a CARA voltada para cima?
- 20) Expanda os produtos $(a + b)^2$, $(a - b)^2$ e $(a + b)(a - b)$, onde “a” e “b” são números reais.
- 21) Calcule, de cabeça, 52^2 , 79^2 e $97 \cdot 103$.
- 22) Prove que o quadrado de um número natural ímpar excede em 1 algum múltiplo de 8.
- 23) Determine todos os pares de números reais cuja soma seja 22 e cujo produto seja 112.
- 24) Generalize: determine todos os pares de números reais cuja soma seja igual a “b” e cujo produto seja igual a “c”, onde “b” e “c” são números reais fixos.

DICAS:

- A) Examine casos particulares, ou casos pequenos, ou casos simplificados de cada problema e, a partir deles, procure descobrir um padrão (regularidade ou lei de formação);
- B) Comece olhando para os elementos “extremos”, “destacados” ou, de alguma forma, “especiais” do problema;

- C) Se não houver nenhum elemento “especial”, escolha um arbitrariamente. Imponha alguma ordem arbitrária aos elementos do problema, e trabalhe com base nesta ordem;
- D) Procure simetrias ou então algum "invariante" do problema (um “invariante” é alguma quantidade que permanece constante enquanto o "processo" descrito no enunciado do problema vai acontecendo);
- E) Às vezes pode ser interessante dar uma representação geométrica para a situação descrita no problema, mesmo que este seja de aritmética ou álgebra. Uma representação geométrica pode facilitar a detecção de padrões;
- F) Use linguagem algébrica para descrever elementos genéricos do problema (normalmente, são usadas letras para representar números arbitrários – por exemplo, um número par genérico é representado pela expressão $2n$, onde n é um número inteiro).